HOJA 4

Tema 2: Series.

1.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una serie de términos positivos y supongamos que $a_n/b_n \to 0$.
a) Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
b) Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.
c) Mediante un ejemplo, demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ puede converger o diverger.
d) Demostrar mediante un ejemplo que si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede converger o diverger.

2.- Demostrar que las siguientes series divergen

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \qquad (2) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{3^n}.$$

Indicación: Utilizar el Ejercicio 11(a) de la Hoja 3.

3.- Determinar si las siguientes series convergen o divergen

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2} \qquad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4-n^3+1} \qquad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen} n}{n^2} \qquad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{\sqrt{n+1}}$$

4.- Describir la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n\, n!}{n^n},$$

según los valores de $a > 0$.

Indicación: Utilizar la Fórmula de Stirling: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}} = 1$.

5.- Calcular las siguientes sumas:

$$(1) \quad \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \qquad (2) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n\,(n+2)}, \qquad (3) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3\,n+1}{n\,(n+1)\,(n+2)}.$$

6.- Decidir razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

a) Si $\lim a_n = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ es convergente.

b) Si para todo n, $a_n > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ es convergente.

c) Si para todo n, $a_n \geq a_{n+1} > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\, a_n$ es convergente.

d) Existe una sucesión $\{a_n\}$ tal que para todo n, $a_n \geq a_{n+1} > 0$, $\lim a_n = 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^n\, a_n$ es convergente.

7.- Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(1) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{10^n}{n!}$	(2) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$	(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$
(4) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{n!}{100^n}$	(5) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{(\log n)^2}{n}$	(6) $1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots$
(7) $\displaystyle\sum^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$	(8) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$	(9) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{2\,n+\sqrt{n}}{n^3+2\sqrt{n}}$
(10) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{n!}{10^{4\,n}}$	(11) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{n^2}{e^n+1}$	(12) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{2^n\,n!}{n^n}$
(13) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$	(14) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{n\,(\log n)^{\frac{1}{2}}}$	(15) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{n\,\log n(\log(\log n))^{\frac{3}{2}}}$
(16) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2\,n)!}$	(17) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{45}{1+100^{-n}}$	(18) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$
(19) $\displaystyle\sum^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)$	(20) $\displaystyle\sum^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$	(21) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}}$

8.- Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

9.- Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n^n}{3^n\,n!}\,, \qquad (2)\quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n\,\log n}\,, \qquad (3)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\,.$$

10.- Sea $z \in \mathbb{C}$. Estudiar la convergencia absoluta de las series:

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \quad 0! = 1\,, \qquad (2)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}\,, \qquad (3)\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,.$$